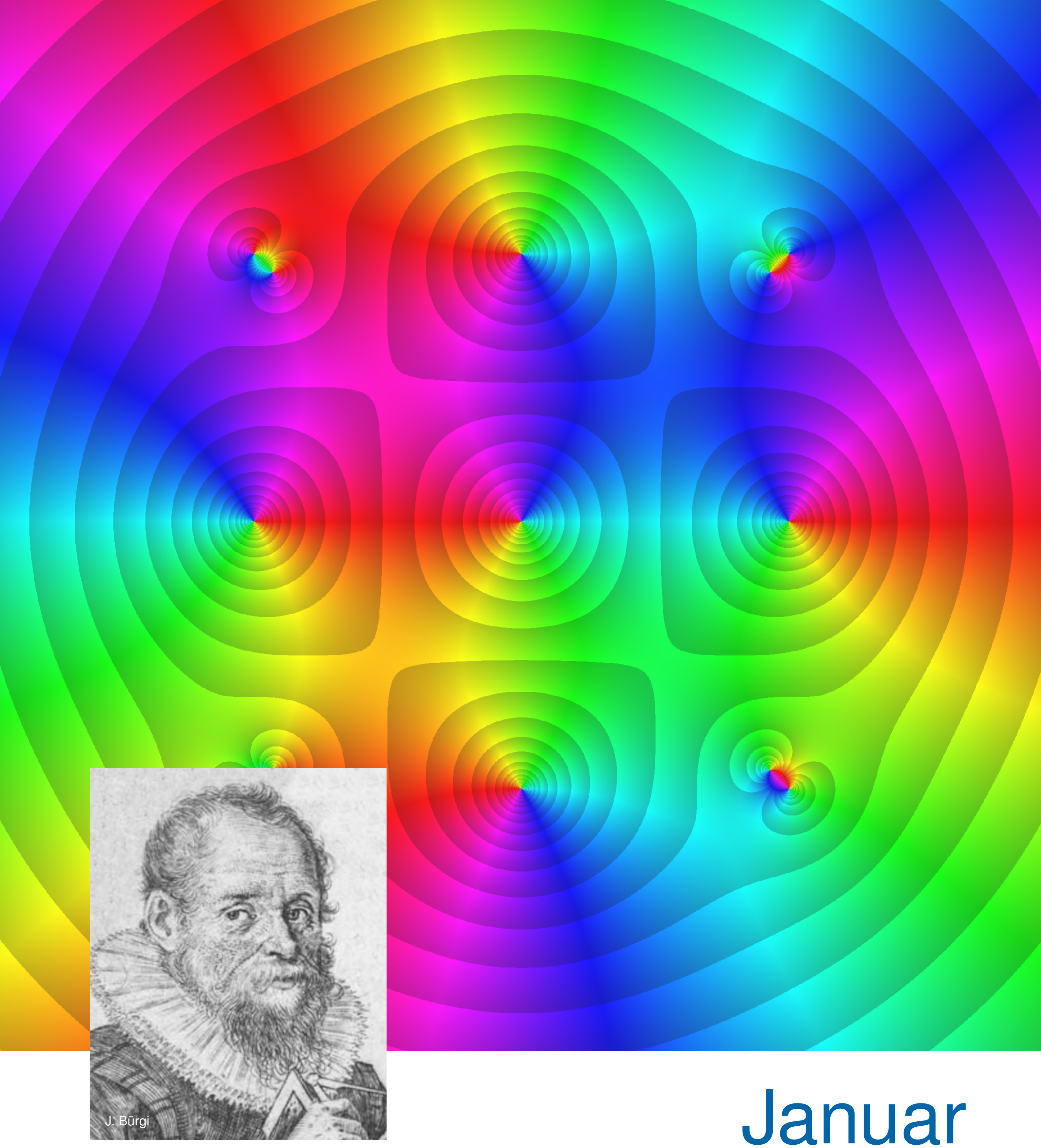


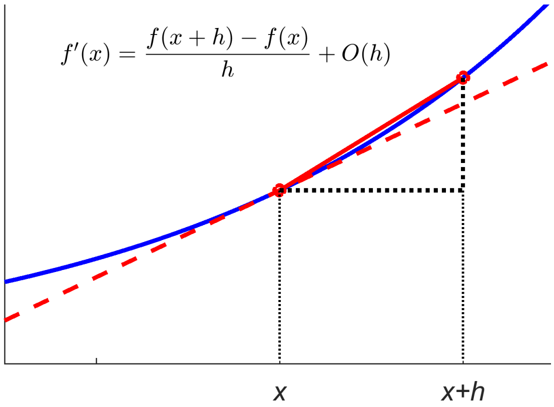
Januar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
29	30	31											

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Finite Differenzen in der komplexen Ebene (von Bengt Fornberg)

Die Anfänge der Infinitesimalrechnung werden meistens den Arbeiten von Leibniz und Newton in den 1680er Jahren zugeschrieben. Die erste Ableitung einer Funktion $f(x)$ wurde als Grenzwert $h \to 0$ der Steigung einer Sehne definiert, wie in der nebenstehenden Abbildung gezeigt. Dies ist auch ein einfaches Beispiel für eine einseitige Finite-Differenzen-Formel (FD)



$$f'(x) = \frac{1}{h}\,(f(x+h) - f(x)) + \mathcal{O}(h^1).$$

Diese Approximation ist allerdings numerisch sehr ineffizient, da ihre Genauigkeit nur von erster Ordnung in h ist. Der zentrierte Differenzenquotient

$$f'(x) = \frac{1}{h}\left(\frac{1}{2}\,f(x+h) - \frac{1}{2}\,f(x-h)\right) + \mathcal{O}(h^2), \quad \text{abgekürzt in Form eines } \textit{Schemas} \text{ als} \quad \frac{1}{h}\begin{bmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix},$$

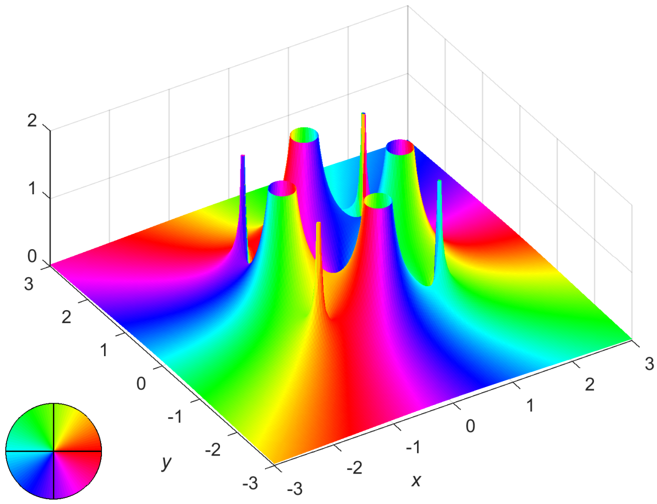
ist dagegen von zweiter Ordnung. Bei einer Verallgemeinerung auf höhere Ordnungen (unter Verwendung von immer mehr Funktionswerten), divergieren die Gewichte in einseitigen Formeln schnell, während sie für zentrierte Schemata konvergieren, aber vom Mittelpunkt aus nur sehr langsam auf Null abfallen. Das ist unlogisch, denn die Ableitung sollte eine völlig lokale Eigenschaft einer Funktion sein.

Im Gegensatz dazu erreichen die FD-Formeln in der komplexen Ebene für analytische Funktionen bereits bei sehr kleinen Schemata außerordentlich hohe Genauigkeiten. Außerdem gehen auf einem quadratischen, gleichabständigen Gitter die Gewichte für größer werdende Schemata in der Größenordnung einer (rotationssymmetrischen) Gauß-Verteilung gegen Null und fallen deshalb typischerweise bereits im Abstand von etwa 5 Gitterpunkten von der Mitte des Schemas unter die Maschinengenauigkeit von 10^{-16}.

Die *charakteristische Funktion* des FD-Schemas

$$f''(z) = \frac{1}{20h^2}\begin{bmatrix} \mathrm{i} & -8 & -\mathrm{i} \\ 8 & 0 & 8 \\ -\mathrm{i} & -8 & \mathrm{i} \end{bmatrix} f + \mathcal{O}(h^8),$$

ist die rationale Funktion mit Polen erster Ordnung in den Gitterpunkten des Schemas mit $h = 1$ und den entsprechenden Gewichten als Residuen. Aus den Merkmalen dieser charakteristischen Funktion, die auf der rechten Seite und auf dem Bild des Monats dargestellt ist, lassen sich in wenigen Schritten alle wichtigen Eigenschaften der Näherung ableiten.



Jost (Jobst) Bürgi (1552 – 1632)

Dieses Kalenderblatt ist Jost (auch Jobst) Bürgi gewidmet, der weit vor der Zeit der Infinitesimalrechnung lebte und als Pionier der FD-Approximationen gilt. Seine hauptsächliche Anwendung finiter Differenzen war die Interpolation und nicht die Differentiation – er kombinierte trigonometrische Identitäten mit FD-Methoden bei der Berechnung einer umfangreichen Sinustabelle (die verloren gegangen ist). Bürgi erfand auch die Logarithmen unabhängig von seinem Zeitgenossen John Napier. Wie viele andere mathematische Größen der Vergangenheit, hatte er eine Reihe von Spezialgebieten. So war er unter anderem der berühmteste Uhren- und Instrumentenbauer seiner Zeit – viele seiner Meisterwerke sind noch heute erhalten. Durch seine Erfindung von zwei Mechanismen, die die Genauigkeit von Uhren um Größenordnungen verbesserten, konnten die Uhren als Instrumente für Wissenschaft und Astronomie eingesetzt werden. Der aus der Schweiz stammende Bürgi verbrachte einen Großteil seiner späteren Jahre an den Höfen von Kassel und Prag. In Prag arbeitete er zusammen mit Johannes Kepler an der Verfeinerung der heliozentrischen Beschreibung des Sonnensystems.