Februar

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
			1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29										

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Gauß-Christoffel-Quadraturen (von Jan Zur)

Eine Quadraturformel zur Berechnung des Riemann-Stieltjes-Integrals einer Funktion $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ bezüglich einer nichtnegativen monoton wachsenden Gewichtsfunktion ω ist eine gewichtete Summe von Funktionswerten der Form

$$Q_\omega^n(f) = \sum_{j=1}^{n} \omega_j f(x_j) \approx \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\omega(x),$$

wobei $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ die *Stützstellen* (oder *Knoten*) und

$$\omega_j = \int_a^b \frac{q_n(x)}{q_n'(x_j)(x - x_j)}\,\mathrm{d}\omega(x), \quad j = 1, \ldots, n,$$

die sogenannten *Gewichte* sind. Hierbei ist $q_n(x) = (x-x_1)\cdot\ldots\cdot(x-x_n)$. Werden die Stützstellen äquidistant gewählt, ergeben sich daraus die Newton-Cotes-Formeln, beispielsweise die Trapezregel. Eine Quadraturformel Q_ω^n hat den Exaktheitsgrad m, falls

$$Q_\omega^n(p) = \int_a^b p(x)\,\mathrm{d}\omega(x)$$

für alle Polynome p vom Grad höchstens m gilt. Sind die n Stützstellen paarweise verschieden, so ist dieser mindestens $n - 1$. Bereits Gauß untersuchte den Exaktheitsgrad von Quadraturfomeln unter der Annahme, dass die Stützstellen beliebig gewählt werden und bewies mit Hilfe seiner Theorie der Kettenbrüche (siehe CB 2014, April), dass der maximale Exaktheitsgrad einer Quadraturformel mit n Stützstellen $2n - 1$ ist. Jacobi zeigte, dass die Stützstellen einer optimalen Quadraturformel die Nullstellen der (monischen) orthogonalen Polynome bezüglich des (gewichteten) Skalarprodukts

$$\langle f, g\rangle = \int_a^b f(x)g(x)\,\mathrm{d}\omega(x)$$

sind. Später verallgemeinerte Christoffel die Theorie von Gauß und Jacobi auf gewichtete Integrale. Aus diesem Grund werden optimale Quadraturformeln, d.h. mit Exaktheitsgrad $2n - 1$, als *Gauß-Christoffel-Quadraturen* und die zugehörigen Gewichte ω_j als *Christoffel-Zahlen* von $\mathrm{d}\omega$ bezeichnet.

Das Bild des Monats zeigt für $\omega(x) = 1/\sqrt{1 - x^2}$ das Phasenporträt eines auf ganz $\mathbb{C}$ definierten Interpolationsfehlers $f(z) - p(z)$ für $f(z) = \mathrm{e}^{-z^3}$ im Bereich $|\mathrm{Re}\,(z)| \le 3$, $|\mathrm{Im}\,(z)| \le 3$. Das Polynom p interpoliert f an den Stützstellen $x_1, \ldots, x_6 \in [-1, 1]$, welche als Nullstellen auf der reellen Achse sichtbar sind. Das Integral des Interpolationsfehlers entspricht dem Quadraturfehler, d.h.

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}\omega(x) - Q_\omega^n(f) = \int_a^b [f(x) - p(x)]\,\mathrm{d}\omega(x).$$

Die zugehörigen monischen orthogonalen Polynome sind die Tschebyschow-Polynome erster Art. Diese Wahl der Stützstellen verhindert das bekannte Phänomen von Runge (siehe CB 2016, Januar).

Elwin Bruno Christoffel (1829 – 1900)

wurde im heutigen Monschau in einer Familie von Tuchhändlern geboren. Er studierte ab 1850 Mathematik in Berlin (unter anderem bei Dirichlet) und promovierte 1856 mit einer Arbeit zur Bewegung der Elektrizität in homogenen Körpern bei Kummer. Bevor er 1859 als Dozent an die Universität Berlin zurückkehrte, verbrachte Christoffel drei Jahre bei seiner kranken Mutter. In dieser Zeit der akademischen Isolation studierte er intensiv die Werke von Cauchy, Dirichlet und Riemann. 1862 wurde Christoffel Nachfolger von Dedekind am Polytechnikum in Zürich und nahm 1869 einen Ruf an die Gewerbeakademie in Berlin (einem Vorläufer der TU Berlin) an. 1872 wechselte er an die Universität Straßburg, wo er bis zu seiner Pensionierung blieb.

Christoffel arbeitete auf vielen mathematischen Gebieten und beschäftigte sich unter anderem mit konformen Abbildungen, Potentialtheorie (insbesondere dem Dirichlet-Problem), Differentialgeometrie, der Riemannschen Theta-Funktion, Invariantentheorie, orthogonalen Polynomen und der Theorie von Licht- und Druckwellen. Neben den Gauß-Christoffel-Quadraturen tragen auch die Schwarz-Christoffel-Formeln und die Christoffel-Symbole in der Differentialgeometrie seinen Namen.