März

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
				1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
25	26	27	28	29	30	31							

Eigenwertprobleme und Konturintegrale (von Marc van Barel)

Für ein gegebenes (beschränktes) Gebiet $\Omega \subset \mathbb{C}$ und eine matrixwertige Funktion $T : \Omega \to \mathbb{C}^{m\times m}$, die in Ω analytisch ist, besteht das *nichtlineare Eigenwert-Problem* in der Bestimmung der Eigenwerte $\lambda \in \Omega$ und der Eigenvektoren $v \in \mathbb{C}^m$, $v \neq 0$, mit

$$T(\lambda)\, v = 0.$$

Wenn der Operator $T(z)$ die Form $A - zB$ besitzt, liegt ein *lineares Eigenwert-Problem* vor. Sind die Einträge der Matrix $T(z)$ Polynome, spricht man von einem *polynomialen Eigenwert-Problem*. Ist die Dimension m der Matrix gleich 1, reduziert sich das Problem auf die Bestimmung aller Nullstellen λ der skalaren analytischen Funktion T im Gebiet Ω.

Wenn es viele Eigenwerte gibt, was geschieht, wenn die Dimension m oder Grad der polynomialen Matrix $T(z)$ groß ist, ist es mitunter nicht erforderlich, alle Eigenwerte zu berechnen. Stattdessen kann man nur an den Eigenwerten interessiert sein, die in speziellen Gebieten der komplexen Ebene liegen. Das Ausgangsproblem wird dazu in die Bestimmung aller Eigenwerte (und der zugehörigen Eigenvektoren) transformiert, die innerhalb oder in der Nähe einer gegeben geschlossenen Kurve (Kontur) Γ liegen.

Um diese Eigenwerte und Eigenvektoren zu approximieren, kann man wertvolle Informationen gewinnen, indem man *Kurvenintegrale* (näherungsweise) berechnet, in denen der *Resolventenoperator* $T(z)^{-1}$ auf eine rechteckige Matrix $V \in \mathbb{C}^{m\times q}$ mit $q < m$ angewendet wird,

$$\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_\Gamma f(z)\, T(z)^{-1} V\, dz.$$

Für die Wahl der Funktion $f(z)$ gibt es verschiedene Möglichkeiten, beispielsweise $f(z) = z^0, z^1, z^2, \ldots$. Im Allgemeinen muss die Funktion $f : \Omega \to \mathbb{C}$ in Ω analytisch sein und V kann eine speziell gewählte oder auch zufällige Matrix sein.

Die Lösung von (nichtlinearen) Eigenwert-Problemen durch Konturintegration erfordert eine effektive Diskretisierung der entsprechenden Kurvenintegrale, d.h., eine Quadraturformel mit Knoten t_j und Gewichten u_j für $j = 1, 2, \ldots, N$. Diese Knoten und Gewichte definieren eine rationale *Filter-Funktion*

$$b(z) = \sum_{j=1}^{N} \frac{u_j}{t_j - z},$$

deren Wert idealerweise im Inneren der Kontur 1 und außerhalb gleich 0 sein sollte. Gute Filter-Funktionen können unter Verwendung von Optimierungsverfahren bestimmt werden, als Alternative zu ihrem Entwurf auf Grundlage eines tieferen Verständnisses der komplexen Analysis.

Das Bild des Monats zeigt das Phasenporträt einer rationalen Filter-Funktion, deren Kontur ein Einheitsquadrat ist. Im roten Bereich in der Mitte ist die Funktion näherungsweise gleich 1, zum Rand hin fällt sie schnell ab.

Édouard Goursat (1858–1936)

wurde im französischen Lanzac geboren. Er studierte an der École Normale Supérieure, wo er von seinem Studienkameraden und lebenslangen Freund Émile Picard und seinen Lehrern Hermite and Darboux beeinflusst wurde. Er lehrte in Toulouse, an der École Normale Supérieure und der Université de Paris.

Einer der bedeutsamsten Beiträge Goursats ist der Satz von Cauchy-Goursat: Ist die Funktion f in einem einfach zusammenhängenden Gebiet komplex differenzierbar (holomorph), so ist das Integral dieser Funktion über eine beliebige geschlosse Kurve in diesem Gebiet gleich Null. Cauchy bewies diesen Satz unter der zusätzlichen Annahme, dass die Ableitung der Funktion stetig ist. Goursat zeigte 1884, dass auf diese Bedingung verzichtet werden kann.

Goursats Schaffen zeichnet sich durch eine bemerkenswerte Breite und Tiefe aus. Er verallgemeinerte den Satz von Stokes, entwickelte Methoden zur Lösung linearer partieller Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und untersuchte die Existenz und Eindeutigkeit von Lösungen. Sein einflussreiches dreibändiges Lehrbuch „Cours d'analyse mathématique" enthält viele neue Ideen und bleibt bis heute eine wertvolle Quelle. Goursat erhielt den Grand Prix des Sciences Mathématique, den Prix Poncelet und den Prix Petit d'Ormoy. Er war Präsident der Société Mathématique de France, Mitglied der Académie des Sciences und Commandeur de la Légion d'Honneur.

https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Goursat/