C. Carathéodory

Mai

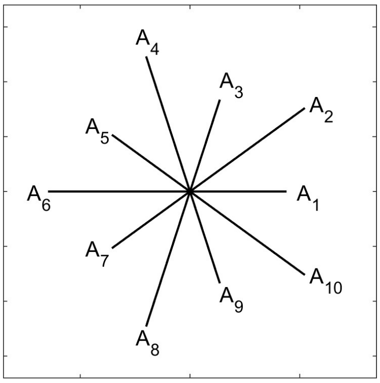
Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
		1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26
27	28	29	30	31									

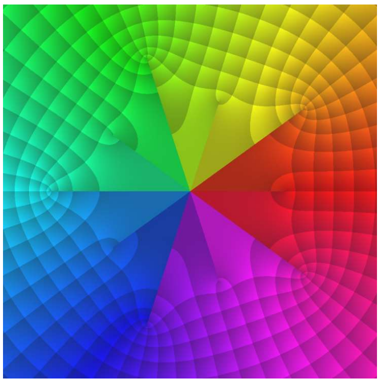
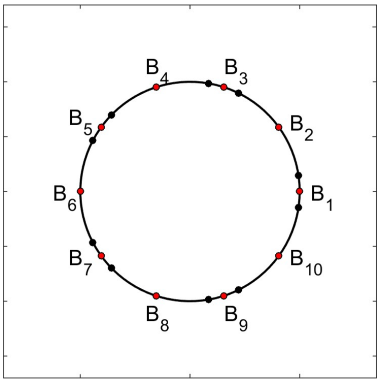
Randverhalten konformer Abbildungen (von Olivier Sète)

Nach dem Riemannschen Abbildungssatz existiert für jedes einfach zusammenhängende Gebiet G der Riemannschen Sphäre $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ mit $\infty \in G$ und mit mindestens zwei Randpunkten eine eindeutig bestimmte konforme Abbildung $f : G \to D = \{w \in \mathbb{C} : |w| > 1\} \cup \{\infty\}$ mit $f(\infty) = \infty$ und $f'(\infty) > 0$.

Über die Zuordnung der Ränder der Gebiete wird dabei zunächst nichts ausgesagt. Sind aber die Ränder ∂G und ∂D der beiden Gebiete homöomorph (d.h. ist G ein Jordan-Gebiet), so lässt sich nach einem berühmten Satz von Carathéodory und Osgood auch die konforme Abbildung f zu einem Homöomorphismus $f : \overline{G} = G \cup \partial G \to \overline{D} = D \cup \partial D$ fortsetzen, der die Ränder einschließt.

Als Beispiel betrachten wir die konforme Abbildung $f : G \to D$ des Komplements $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E$ eines Sternes E mit $2n$ Strahlen auf D. Dieser Stern ist das Urbild des Intervalls $[-1, 1]$ unter der Abbildung $P(z) = \frac{1}{2}z^n + \frac{3}{4}$ und besteht aus $2n$ vom Nullpunkt ausgehenden Strahlen (in der linken Abbildung für $n = 5$ gezeigt). Die konforme Abbildung f kann explizit angegeben werden: $f(z) = z\,(R(P(z))/z^n)^{1/n}$ mit $R(z) = z + \sqrt{z-1}\,\sqrt{z+1}$. Das mittlere Bild zeigt ein Phasenporträt dieser Funktion für $n = 5$ im Quadrat $|\mathrm{Re}\,(z)|, |\mathrm{Im}\,(z)| \le 1.7$. Deutlich erkennbar ist der Sprung der Phase entlang der Strahlen.



Wegen dieser Unstetigkeit lässt sich f nicht zu einem Homöomorphismus $\overline{G} = \widehat{\mathbb{C}} \to \overline{D}$ fortsetzen. Unterscheidet man aber die beiden Seiten der Strahlen, so ist eine stetige Fortsetzung von f möglich.

Diese Idee wird durch das von Carathéodory eingeführte Konzept der Primenden formalisiert. Grob gesprochen sind Primenden Äquivalenzklassen von Querschnitten des Gebiets, die sich zu einem Randpunkt zusammenziehen und so in einem gewissen Sinne konvergieren. Der zentrale Satz von Carathéodory besagt, dass jede konforme Abbildung $f : G \to D$ eine bijektive Abbildung von der Menge der Primenden von G auf die Einheitskreislinie ∂D induziert.

Im Beispiel oben gibt es ein Primende pro Endpunkt eines Strahls, zwei Primenden pro Punkt auf einem Strahl (außer Endpunkt und Nullpunkt), und $2n$ Primenden bei 0. Die rechte Abbildung zeigt den Einheitskreis mit den Bildpunkten B_j der Endpunkte A_j der Strahlen von E. Die schwarzen Punkte sind die Bilder der $2n = 10$ Primenden bei 0. Das Bild des Monats zeigt die Ableitung f' von f.

Constantin Carathéodory (1873 – 1950)

wurde als Sohn des Diplomaten Stephanos Carathéodory und Despina Petrococchino in Berlin geboren und wuchs in Brüssel auf. Nach dem Abitur studierte er an der École Militaire de Belgique. Als Bauingenieur im Offiziersrang arbeitete er im Osmanischen Reich, am Suezkanal sowie für die Nil-Regulierung. Nach Messungen an der Cheopspyramide entschloss er sich, sich ganz der Mathematik zu widmen. Er studierte in Berlin und Göttingen, wo er 1904 bei Minkowski über ein Thema der Variationsrechnung promovierte. Nach seiner Habilitation arbeitete er in Göttingen, Bonn, Hannover, Breslau und Berlin. 1920 wurde er Präsident der Universität Smyrna (heutiges Izmir), die er maßgeblich mit aufbaute. Mit dem Einmarsch der Türken 1922 endete seine Arbeit dort. Anschließend lehrte Carathéodory in Athen, bis er 1924 einem Ruf an die Universität München folgte. Ab 1930 half er auf Bitte der griechischen Regierung bei der Neuorganisation der Universitäten Athen und Thessaloniki. Anschließend kehrte Carathéodory nach München zurück, wo er 1938 emeritiert wurde.

Carathéodory lieferte fundamentale Ergebnisse auf vielen Gebieten der Mathematik: partielle Differentialgleichungen, Funktionentheorie, Variationsrechnung, Maß- und Integrationstheorie, sowie geometrische Optik, Thermodynamik und theoretische Physik. Er war Mitglied der Preußischen, Göttinger und Bayerischen Akademie der Wissenschaften. Carathéodory erfreute sich hoher Wertschätzung wegen seines analytischen Verstandes, seiner Fachkompetenz und seiner persönlichen Integrität. Er sprach fließend Griechisch, Französisch, Deutsch, Englisch, Italienisch und Türkisch.