



Juni

Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So	Mo	Di	Mi	Do	Fr	Sa	So
					1	2	3	4	5	6	7	8	9
10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30							

TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERGAKADEMIE FREIBERG

Das Volumen von Modul-Räumen

Die bereits seit 1936 verliehene Fields-Medaille wurde 2014 erstmals an eine Frau vergeben, die iranische Mathematikerin Maryam Mirzakhani. Ihre Arbeiten stellen Verbindungen zwischen verschiedenen Disziplinen her – der komplexen Analysis, der hyperbolischen Geometrie, der Dynamik und der Topologie.

Um die Verbindung des Bildes dieses Monats mit Mirzakhanis Arbeiten zu verstehen, betrachten wir Flächen, die topologisch (bis auf Deformation) nach der Anzahl ihrer „Henkel“ klassifiziert werden können, dem sogenannten *Geschlecht*. Eine Kugel hat das Geschlecht 0, eine Kaffeetasse das Geschlecht 1 und eine (korrekt gebackene) Brezel hat das Geschlecht 3. Eine *Riemannsche Fläche* (CB Dezember 2015) besitzt außerdem eine Struktur, die es ermöglicht, komplexe Analysis auf ihr zu betreiben. Die komplexen Zahlen werden ebenso wie eine Fläche durch zwei Variablen beschrieben. Eine Fläche kann deshalb aus Sicht der algebraischen Geometrie auch als *algebraische Kurve* betrachtet werden. Dies liefert dann eine Beschreibung in Form von Polynomgleichungen. Ein allgemeiner *Modul-Raum* von algebraischen Kurven ist ein geometrischer Raum, dessen Punkte Klassen isomorpher algebraischen Kurven sind. Um ein Beispiel zu geben: Während ein Kreis in der Geometrie eindeutig durch seinen Mittelpunkt und seinen Radius bestimmt ist, ist bei Kongruenzbetrachtungen nur der Radius von Bedeutung. Der Modul-Raum der Kreise ist dann die Menge der positiven reellen Zahlen.

In ihrem 2006 in den berühmten „*Inventiones Mathematicae*“ erschienenen Artikel untersuchte Mirzakhani die Volumina von Modul-Räumen hyperbolischer Riemannscher Flächen mit Spitzen. Sie stellte fest, dass es sinnvoll ist, ein allgemeineres Objekt zu betrachten, nämlich berandete hyperbolische Riemannsche Flächen mit n geodätischen Randkomponenten der Längen L_1, \dots, L_n . Eine geodätische Linie ist eine geschlossene Kurve mit der Eigenschaft, dass keine (lokale) Verformung sie verkürzen kann. Mirzakhani entwickelte eine Methode zur Integration geometrischer Funktionen über Modul-Räume von Kurven und erhielt eine neuartige, rekursive Formel für das Volumen $V_g(L_1, \dots, L_n)$ dieser Modulräume. Sie zeigte, dass V_g ein Polynom in L_1^2, \dots, L_n^2 ist und stellte fest, dass das Volumen des Modul-Raums ein rationales Vielfaches von $\pi^{6g-6+2n}$ ist (was vorher bereits von S. Wolpert gezeigt wurde). Bei der Herleitung dieser Ergebnisse machte Mirzakhani Gebrauch von den Funktionen

$$F_{2k+1}(t) = (2k+1)! \sum_{i=0}^{k+1} \zeta(2i) (2^{2i+1} - 4) \frac{t^{2k+2-2i}}{(2k+2-2i)!},$$

wobei ζ die Riemannsche Zeta-Funktion bezeichnet (CB November 2011). Das Bild dieses Monats zeigt die Funktion $F_7(z)$ für $|\operatorname{Re} z| < 30$, $|\operatorname{Im} z| < 30$.

Maryam Mirzakhani (1977 – 2017)

wurde in Teheran geboren, ihre Eltern waren Ahmad Mirzakhani und Zahra Haghighi. Ihre ersten Jahre waren schwierig, denn von 1980 bis 1988 herrschte Krieg zwischen Iran und Irak. Sie befreundete sich mit Roya Beheshti, die heute außerordentliche Professorin an der Washington University in St. Louis ist. Bei der Internationalen Mathematikolympiade (IMO) 1994 in Hongkong holte Mirzakhani Gold und Beheshti Silber. Bei der IMO 1995 in Toronto erreichte Mirzakhani die volle Punktzahl.

Im Februar 1998 überlebte Mirzakhani ein Busunglück, als ein Bus mit Teilnehmern eines mathematischen Wettbewerbs in eine Schlucht stürzte – sieben Mathematiker und zwei Busfahrer starben.

Nach ihrem Bachelor-Abschluss an der Sharif Universität in Teheran promovierte Mirzakhani 2004 in Harvard bei Curtis McMullen mit dem Thema *Simple Geodesics on Hyperbolic Surfaces and Volume of the Moduli Space of Curves*. Danach ging sie mit einem Stipendium der Clay Foundation an die Princeton University, und ab 2009 war sie Mitglied der mathematischen Fakultät der Stanford University.

Mirzakhanis Arbeiten sind sehr tiefgründig und lieferten bahnbrechende und überraschende Ergebnisse. Im Jahr 2009 wurde ihr der Leonard und Eleanor Blumenthal-Preis verliehen, eine Auszeichnung für „die Person, die den bedeutendsten Beitrag zur Forschung auf dem Gebiet der reinen Mathematik geleistet hat.“ Für ihre „herausragenden Beiträge zur Dynamik und Geometrie von Riemannschen Flächen und deren Modul-Räumen“ wurde sie 2014 als erste Frau und erste Iranerin mit der Fields-Medaille geehrt.

Im Alter von nur 40 Jahren erlag Mirzakhani einem Krebsleiden. Der Präsident der Stanford University, Marc Tessier-Lavigne, würdigt ihre Arbeit: „Maryam ist viel zu früh von uns gegangen, aber ihr Einfluss wird für Tausende von Frauen weiterleben, die sie inspiriert hat, Mathematik und Wissenschaft zu betreiben“.